حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اثبات از طریق برهان خلف

ما می‌خواهیم نشـان بدهیم که p درست اسـت. فرض می‌کنیم چنین نباشد و بنابراین $\sim p$ (نقیض p) درسـت است. سپس یک تناقض به‌دست می‌آوریم (نتیجه می‌گیریم). با توجه به حکمی که از بحث دربارهٔ تناقض در فصل ۱ به‌دست آوردیم، p باید درست باشد.

قضیهٔ ۱. ۱۰

اگر n^2 یک عدد صحیح و زوج باشد، در این صورت n نیز همین‌طور است (صحیح و زوج است).

اثبات:

خلاف این را فرض می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم n فرد باشـد. بنابراین، عددی صحیح مانند k وجود دارد به قسمی که: $n=2k+1$. در این حالت $n^2=2(2k^2+2k)+1$ عددی فرد است و این با فرض زوج بودنِ n^2 تناقض دارد. بنابراین n می‌باید زوج باشد.

قضیهٔ ۲. ۱۰

عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات:

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی فرض کنیم که $\sqrt{2}$ گویاست. بنابراین دو عدد صحیح m و n بدون هیچ مقسوم‌علیه مشترک وجود دارند به‌طوری که: $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. با به توان ۲ رساندن دو طرف این تساوی خواهیم داشـت: $2n^2=m^2$. بنابراین m^2 زوج اسـت. طبق قضیهٔ ۱. ۱۰، m زوج اسـت. یعنی، ۲ عدد m را می‌شمارد (m بر ۲ بخش‌پذیر است). به‌عبارت دیگر، برای بعضی اعداد صحیح مانند k داریم: $m=2k$.

با به توان دو رساندن خواهیم داشت: $2n^2=m^2=4k^2$ که نتیجه می‌گیریم: $n^2=2k^2$.

این تساوی نشان می‌دهد که n^2 زوج است و طبق قضیهٔ ۱. ۱۰، n زوج است.

مـا نتیجـه گرفتیم که ۲ هر دو عدد m و n را می‌شـمارد (m و n هر دو بر عدد ۲ بخش‌پذیرند) و این با فرض ما که m و n هیچ مقسـوم‌علیه (عامل) مشـترکی ندارند، در تناقض است. بنابراین، $\sqrt{2}$ باید گنگ باشد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1.Proof .... اثبات، برهان	2.Contradiction .... خُلف
3. Assume .... فرض کردن	4. Even .... زوج
5.integer .... عددصحیح	6. Suppose .... فرض کردن
7.Contradicts .... تناقض	8. Assumption .... فرض
9. Irrational .... گُنگ، اصم، ناگویا	10.Squaring .... به توان ۲ رساندن
11. Common divisors .... عامل‌های مشترک	12.Conclude .... نتیجه‌گیری

Proof by contradiction:

We want to show that p is true. We assume it is not and therefore $\sim p$ is true and then derive a contradiction. By the rule of contradiction discussed in Chapter 1, p must be true.

Theorem 10.1

If n^2 is an even integer so is n.

Proof.

Suppose the contrary. That is suppose that n is odd. Then there is an integer k such that $n=2k+1$. In this case, $n^2=2(2k^2+2k)+1$ is odd and this contradicts the assumption that n^2 is even. Hence, n must be even. ■

Theorem 10.2

The number $\sqrt{2}$ is irrational.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that $\sqrt{2}$ is rational. Then there exist two integers m and n with no common divisors such that $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. Squaring both sides of this equality we find that $2n^2=m^2$. Thus, m^2 is even. By Theorem 10.1, m is even. That is, 2 divides m. But then $m=2k$ for some integer k. Taking the square we find that $2n^2=m^2=4k^2$, that is $n^2=2k^2$. This says that n^2 is even and by Theorem 10.1, n is even. We conclude that 2 divides both m and n and this contradicts our assumption that m and n have no common divisors. Hence, $\sqrt{2}$ must be irrational. ■

ترجمه برای دانش‌آموزان

Theorem 10.3

The set of prime numbers is infinite.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that the set of prime numbers is finite. Then these prime numbers can be listed, say, $p_1,p_2,...,p_n$. Now, Consider the integer $N=p_1p_2...p_n+1$. By the Unique Factorization Theorem, (See Problem 12.5) N can be factored into primes. Thus, there is a prime number p_i such that $p_i|N$. But since $p_i|p_1p_2...p_n$ we have $p_i|(N-p_1p_2...p_n)=1$, a contradiction since $p_i>1$ ■